УДК 371.24+371.212

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА И ЕГО НАГЛЯДНО-ОБРАЗНОЙ МОДЕЛИ В УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

В.И. Горбачев (Брянск, Россия)

Е.Н. Пузырева (Брянск, Россия)

Аннотация

Постановка проблемы. В учебной геометрической деятельности исследуется проблема формирования интегрального модельного представления геометрического пространства в системе закономерностей становления его наглядно-образной модели.

Цель статьи – в историко-геометрическом анализе установить содержательно-методические закономерности формирования наглядно-образной модели геометрического пространства и ее последующей интеграции с векторной, арифметической моделями в представлении абстрактного геометрического пространства.

Методология и методы исследования. Методологию исследования составляет реализуемый в последовательных уровнях математического абстрагирования пространственно-теоретический подход формирования модельного представления геометрического пространства и на его основе определения абстрактного геометрического пространства.

Результаты исследования. В качестве предмета исследования в учебной геометрической деятельности выступают закономерности формирования модельного, абстрактного представлений геометрического пространства. Со времен «Начал» Евклида основу модельного представления геометрического пространства составляет его наглядно-образная модель, характеризуемая конструктивными изображениями геометрических фигур, пространственными образами их классов.

Помимо создания конструктивных образов геометрических фигур, преобразований движения и подобия, содержание наглядно-образной модели составляют родовидовая систематизация геометрических фигур, основанная на оперировании пространственными образами деятельность математического доказательства, исследование конструктивных, пространственных и метрических свойств геометрических фигур.

Наряду с конструктивными образами геометрических фигур в учебной геометрической деятельности используются и их знаковые образы: векторные модели геометрических фигур, аналитические модели геометрических фигур. В системе векторных, аналитических образов геометрических фигур в субъектном сознании создаются векторная, арифметическая модели геометрического пространства. В интеграции наглядно-образной, векторной и арифметической моделей формируется наглядно-образный уровень пространственного геометрического мышления.

Заключение. Формирование представлений геометрического пространства в спектре моделей, в последующем абстрагировании от модельных образов с аксиоматизацией свойств, справедливых в каждой из моделей, устраняет реализуемое в учебниках геометрии общего образования его слитное образно-абстрактное изучение.

Ключевые слова: *методика формирования учебной геометрической деятельности, наглядно-образная модель геометрического пространства, модельное представление геометрического пространства.*

Горбачев Василий Иванович – кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, профессор, директор естественно-научного института, заслуженный учитель Российской Федерации, Брянский государственный университет им. академика И.Г. Петровского; e-mail: enibgu@mail.ru

Пузырева Елизавета Николаевна – старший преподаватель кафедры информатики и прикладной математики, Брянский государственный университет им. академика И.Г. Петровского; ORCID ID: 0009-0002-4565-190X; e-mail: puzyreva-knysh@yandex.ru

П*остановка проблемы.* В «Началах» Евклида геометрические фигуры вместе с преобразованиями движения и подобия, существование которых устанавливается в процедурах их конструктивного изображения, не составляют определенной целостности, задаются вне представлений геометрического пространства. В отсутствие наглядно-образного представления геометрического пространства (наглядно-образной модели) аналитические модели геометрических фигур в «Геометрии» Р. Декарта выступают разрозненными геометрическими объектами. В «Началах» Евклида и в «Геометрии» Р. Декарта как систематизация, так и исследование свойств геометрических фигур осуществляются вне связей с представлениями соответствующих геометрического, арифметического пространств.

Развитие представлений абстрактного геометрического пространства из его модельных форм получило признание лишь с открытием неевклидовой геометрии Н.И. Лобачевским, теоретическим обоснованием геометрии Д. Гильбертом. Конструкция геометрического пространства в своей абстрактной форме впервые была выделена в «Основаниях геометрии» Д. Гильберта вместе с представлениями его конкретных моделей. В развитии идеи Д. Гильберта аксиоматического определения абстрактного геометрического пространства Г. Вейлем [Вейль, 1996] создается конструкция абстрактного евклидова пространства, обобщающая содержание векторной модели геометрического пространства, имеющей свое наглядное истолкование в физике.

Историко-геометрическая закономерность формирования абстрактной формы геометрического пространства на базе его модельных представлений не наследуется содержанием учебной геометрической деятельности уровня общего математического образования. Учебная геометрическая деятельность проектируется в невыделенности модельно-абстрактной конструкции евклидова пространства, вне целенаправленного исследования векторной и арифметической моделей геометрического пространства с соответствующими методами геометрического доказательства, в слиянии наглядно-образной модели геометрического пространства и его абстрактной аксиоматизируемой формы.

В последовательном формировании модельных и абстрактных представлений геометрического пространства проектируется методическая система обучения геометрии.

Цель статьи – в методологии пространственно-теоретического подхода, наследующего историко-математические закономерности становления абстрактного математического мышления, установить содержательно-методические закономерности формирования наглядно-образной модели геометрического пространства и ее последующей интеграции с векторной, арифметической моделями в представлении абстрактного геометрического пространства.

Обзор научной литературы. По выражению И.Ф. Шарыгина, идущая от «Начал» Евклида учебная геометрическая деятельность «не только исторически (для всего человечества), но и генетически (для отдельного человека) является первичным видом интеллектуальной деятельности» [Шарыгин, 2000]. Предметом учебного исследования при этом выступают закономерности наглядно-образной модели геометрического пространства, представленной деятельностью систематизации, доказательства, исследования свойств геометрических фигур, заданных своими конструктивными образами. Однако содержание учебной геометрической деятельности только представлением наглядно-образной модели геометрического пространства не ограничивается. Во-первых, система конструктивных образов геометрических фигур наглядно-образной модели существенно расширена их аналитическими, векторными образами в содержании соответствующих арифметической и векторной моделей геометрического пространства, выделенных в фундаментальных исследованиях Р. Декарта [Декарт, 1938] и Г. Вейля [Вейль, 1996]. Во-вторых, идея Евклида аксиоматизации геометрического пространства, реализованная Д. Гильбертом лишь через два тысячелетия, приводит к конструкции абстрактного геометрического пространства, обобщающей все его модельные представления. Существующая методическая система формирования учебной геометрической деятельности, по сути, направлена на создание модельно-абстрактных представлений геометрического пространства, но этой цели не достигает. Проектирование методической системы модельно-абстрактного представления геометрического пространства предполагает историко-содержательный анализ закономерностей формирования наглядно-образной модели геометрического пространства, векторной и арифметической моделей.

Как понятие геометрического пространства в содержании наглядно-образной модели, так и понятие учебной теории абстрактного геометрического пространства в классических исследованиях Евклида [Начала Евклида, 1950, кн. II], Аполлония [Аполлоний Пергский, 2019], Р. Декарта [Декарт, 1938] не рассматриваются. Исследуемые геометрические объекты признаются существующими на основании построения, описательного определения, в содержании некоторой неявно заданной формальной целостности (математической реальности), адекватно отражающей свойства физического пространства. Не случайно многие из понятий геометрических объектов задаются содержанием мысленного осуществления конструктивных действий с геометрическими объектами в форме условного чертежного изображения, признаваемого реально существующим.

В «Началах» Евклида фундаментальная задача систематизации геометрических фигур осуществляется с опорой на сформированные в содержании реального физического пространства интуитивные субъектные представления (линия – длина без ширины, граница поверхности; поверхность задана только длиной и шириной; фигура расположена внутри границ; тело задается длиной, шириной, глубиной). Но объекты геометрии составляют хотя и адекватную, но отличную от представлений физического пространства «математическую реальность» – они абстрагированы от предметных свойств реального мира, им «присвоены» идеальные свойства, воспринимаемые лишь сознанием (бесконечное продолжение прямых и плоскостей, бесконечность класса геометрических фигур, принадлежность прямой плоскости, параллельность прямых, прямой и плоскости, преобразования движения и подобия). Признаваемая сознанием реальность существования геометрических фигур в условиях построения их условных изображений определенными конструктивными средствами развивается в действиях их мысленного перемещения, пересечения, совмещения по аналогии с преобразованиями физических объектов: «Действительно, если треугольник *ABC* совмещается с треугольником *DFE* и кладутся точка *A* на точку *D*, а прямая *AB* на *DE*, то точка *B* совместится с *E* вследствие того, что *AB* равна *DE*, а так как *AB* совместилась с *DE*, то и прямая *AC* совместится с *DF* вследствие того, что угол *BAC* равен *EDF*; так что и точка *C* совместится с точкой *F* вследствие того, что *AC* тоже равно *DF*» [Начала Евклида, 1950, кн. I, с. 18–19]. Выступающая определенным вместилищем геометрических фигур «математическая реальность» систематизируется Евклидом идеализированным представлением плоскости с содержащимися в ней геометрическими фигурами и ее пространственным расширением, содержащим тела, характеризуемые не только длиной и шириной, но и глубиной, а также ограничивающие тела поверхности. В пространственном расширении плоскости устанавливается его фундаментальное свойство – в нем выделяются точки, расположенные вне плоскости, через них проводятся прямые параллельные, перпендикулярные, пересекающие плоскость в определенной точке, во взаимной связи точек, прямых и плоскостей конструируются изображения абстрагированных от предметных свойств физического мира телесных (не плоских) геометрических фигур. В условиях несформированности логической процедуры математического определения геометрических понятий, свойственной уровню теории геометрического пространства, Евклидом используется конструктивная, основанная на наглядных образах процедура создания их изображений. Классическим примером выступает определение Евклидом конуса: «Конус будет, если при неподвижности одной из сторон прямоугольного треугольника, принадлежащих к прямому углу, вращающийся треугольник снова вернется в то же самое положение, из которого он начал двигаться, то охваченная фигура и есть конус» [Начала Евклида, 1950, кн. XI, с. 10]. «Все его (Евклида) определения, – отмечает Д.Д. Мордухай-Болтовский, – представляют только описания геометрических фактов, им наблюдаемых» [Начала Евклида, 1950, кн. XI, с. 164].

В сочетании конструктивных действий построения наглядных образов геометрических фигур и их мысленного преобразования (перемещение, совпадение, вписывание, описывание) Евклидом создается представленная «плоской и телесной» формами наглядно-образная модель пока еще не выделенного геометрического пространства. Установленные в наглядно-образной модели геометрического пространства теоремы, по выражению И.Ф. Шарыгина, «представляют собой один из самых древних памятников мировой культуры; геометрия – это феномен общечеловеческой культуры» [Шарыгин, 2000 с. 7–8]. При этом интуитивный, наглядно-образный уровень пространственного геометрического мышления, формирующийся в содержании наглядно-образной модели, не сочетается с попыткой аксиоматического определения абстрактного геометрического пространства, создание которого возможно лишь на новом уровне математического абстрагирования – абстрагирования от модельных образов объектов. Поэтому И.Ф. Шарыгин не одобряет практику проектирования учебной геометрической деятельности в интеграции представлений наглядно-образной модели и аксиоматического метода построения абстрактного геометрического пространства: «библеизация евклидовских “Начал” принесла скорее вред, чем пользу» [Шарыгин, 2004].

Сформированное в «Началах» Евклида представление наглядно-образной модели геометрического пространства существенно расширяется в «Конических сечениях» Аполлония. Так же, как и Евклид, Аполлоний использует конструктивную процедуру описания пространственного геометрического образа – конического сечения: «Если от некой точки к окружности круга, не лежащего в той же самой плоскости, что и точка, проведена прямая, причем она проведена в бесконечность в обе стороны, и при неподвижности этой точки данная прямая, двигаясь по окружности круга, вернется в свое изначальное положение, то поверхность, описанную этой прямой и составленную из двух поверхностей, имеющих общую вершину, я называю конической поверхностью, а неподвижную точку – ее вершиной, прямую же, проводимую через точку и середину круга, – осью» [Аполлоний Пергский, 2019, с. 72]. К совокупности геометрических фигур, исследованных Евклидом, Аполлоний добавляет новые – классические линии аналитической геометрии, полученные определенным сечением плоскостью конической поверхности. Метод сечений, позволивший Аполлонию изучить внутреннюю структуру конической поверхности, становится впоследствии основным методом исследования поверхностей второго порядка. С другой стороны, выделенные в сечениях конической поверхности плоскостями гипербола, парабола, эллипс, окружность в содержании аналитического метода получили свое полное описание [Eschenburg, 2022]. Фактически в наглядно-образной модели геометрического пространства Аполлонием в системе аналитических моделей классических линий второго порядка создается интуитивное представление арифметической модели геометрического пространства.

В описании определенных классов геометрических фигур (линий) Р. Декарт отделяет их от «механических линий», но, как и Евклид, неявно опирается при этом на интуитивные представления физического пространства:

«– среди задач геометрии одни плоски, другие телесны и третьи линейны; это значит, что одни из них можно построить, проводя лишь прямые линии и круги, тогда как другие требуют применения, по меньшей мере, какого-нибудь конического сечения и, наконец, третьи – какой-нибудь, более сложной линии [Декарт, 1938, с. 29];

– мне кажется совершенно ясным, что если – как это и делают – почитать геометрическим то, что определено и точно, а механическим то, что не таково, и если рассматривать геометрию как науку, которая учит вообще познанию мер всех тел, то… можно представить себе, что эти линии описаны непрерывным движением или несколькими такими последовательными движениями, из которых последующее вполне определяется им предшествующими, – ибо этим путем всегда можно узнать их меру» [Декарт, 1938, с. 30].

В отсутствие представлений геометрического пространства Р. Декарт в качестве объективно необходимого средства решает задачу ориентации, пространственной расположенности изучаемой геометрической линии: «Но чтобы охватить совокупность всех встречающихся в природе кривых и распределить их по порядку по определенным родам, я считаю наиболее подходящим указать на то обстоятельство, что все точки линий, которые можно назвать геометрическими, т.е. которые подходят под какую-либо точную и определенную меру, обязательно находятся в некотором отношении ко всем точкам прямой линии, которое может быть выражено некоторым уравнением, одним и тем же для всех точек данной линии» [Декарт, 1938, с. 32–33].

Л. Эйлер расширяет двумерную арифметическую модель геометрического пространства введением его трехмерной модели, углубляет содержание функционально-аналитического метода изучения плоских линий и поверхностей, методу сечений Аполлония одной конкретной (конической) поверхности придает функционально-алгебраическую трактовку, охватывающую все виды поверхностей:

– с помощью трех взаимно перпендикулярных координат положение всякой точки M поверхности определяется аналогично тому, как обычно представляют положение всех точек кривых, расположенных на плоскости, с помощью двух взаимно перпендикулярных координат [Эйлер, 1961, с. 306];

– природа каждой поверхности выражается с помощью уравнения, которое определяет координату z через две другие координаты x и y и постоянные; для всякой заданной поверхности переменное z будет равно некоторой функции двух переменных x и y [Эйлер, 1961, с. 306];

– что касается природы различных поверхностей, то здесь сразу напрашивается разделение их на непрерывные, или правильные, и на прерывные, или неправильные; непрерывной будет такая поверхность, у которой все точки выражаются с помощью одного и того же уравнения между z и x и y, то есть где z является одной и той же функцией x и y для всех точек поверхности [Эйлер, 1961, с. 307];

– когда в уравнении для поверхности между координатами x, y и z одну из них – z принимают постоянной = h, то в этом случае образуется сечение этой поверхности плоскостью, параллельной плоскости APQ и отстоящей от нее на расстояние h; если этой букве h последовательно придавать все возможные значения, как положительные, так и отрицательные, то получатся все сечения поверхности, образуемые плоскостями, параллельными плоскости APQ; с помощью всех этих сечений можно определить всю поверхность [Эйлер, 1961, с. 318].

Модельное представление геометрического пространства существенно углубляет его векторная модель, введенная Г. Вейлем [Вейль, 1996], на базе аксиоматического определения евклидова пространства. Понятия векторных моделей конкретных геометрических фигур приводят к установлению соответствия пространственных образов геометрических фигур наглядно-образной модели геометрического пространства и векторных моделей геометрических фигур евклидова пространства [Пузырева, 2023]. В системе векторных моделей геометрических фигур формируется векторная модель геометрического пространства,

ВЕСТНИК КРАСНОЯРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА им. В.П. АСТАФЬЕВА

в содержании которой осуществляется исследование его фундаментальных свойств.

Трудами выдающихся геометров в человеческой цивилизации на протяжении веков созданы различные модельные представления геометрического пространства – его наглядно-образная, арифметическая и векторная модели. Каждой из моделей геометрических фигур соответствуют свои пространственные образы геометрических фигур – либо в форме понятий, заданных условными конструктивными изображениями, либо в форме аналитических зависимостей координат произвольных точек фигуры, либо в содержании векторной характеризации свойств понятий.

Материалы и методы. Общей закономерностью античной и развиваемой на ее основе вплоть до XVIII в. классической геометрии выступает все более широкая систематизация геометрических фигур с исследованием их свойств вне категории геометрического пространства: прямых и плоскостей, классических многоугольников и многогранников (Евклид), классических линий на плоскости (Р. Декарт, П. Ферма), линий и поверхностей в пространстве (Л. Эйлер). В содержании исследований мощное развитие получили аналитико-синтетический метод доказательства свойств классов геометрических фигур, заданных пространственными образами (Евклид, Аполлоний), аналитический метод исследования линий, поверхностей в прямоугольной декартовой системе координат (Р. Декарт, Л. Эйлер), метод сечений в исследовании различных классов поверхностей (Аполлоний, Л. Эйлер). В интуитивном представлении наглядно-образной модели, двумерной и трехмерной арифметических моделей геометрического пространства за пределами математического анализа пока остаются понятия геометрической фигуры и геометрического пространства, их свойства и взаимные связи. «Уникальность геометрии, – подчеркивает И.Ф. Шарыгин, – ее отличие от всех других предметов, в том числе и предметов математического цикла, состоит в том, что ее содержание существенно не изменилось за многовековую и даже тысячелетнюю историю» [Шарыгин, 2000].

Идея абстрактного геометрического пространства, по выражению Н.В. Ефимова, была подготовлена эволюцией всей математики XIX в., ее прямым источником выступает открытие неевклидовой геометрии Н.И. Лобачевского[1][2][3]. Категория абстрактного геометрического пространства введена Д. Гильбертом в его «Основаниях геометрии» [Гильберт, 1948]:

– точки, прямые, плоскости в геометрическом пространстве характеризуются не теми геометрическими образами, которые соединяются в эмпирическом сознании с этими названиями, а исключительно аксиомами, устанавливающими отношения между ними;

– основными требованиями к аксиомам выступают не их соответствие представлениям физического пространства, а свойства непротиворечивости и независимости;

– система понятий абстрактного геометрического пространства лишена содержательного смысла в математическом отражении свойств реального мира;

– теория абстрактного геометрического пространства является чисто логической системой, основанной на системе его аксиом.

Таким образом, категория геометрического пространства в ее развитии от «Начал» Евклида до «Оснований геометрии» Д. Гильберта представлена разными, последовательно формируемыми уровнями математического абстрагирования. В абстрагировании от предметных свойств реального мира геометрическое пространство представлено своими моделями, различающимися образами геометрических фигур, преобразований, отношений. В абстрагировании от модельных образов объектов, обладающих общей системой свойств, абстрактное

[1] Ефимов Н.В. Высшая геометрия. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1953. 528 с.
Efimov, N.V. (1953). Higher geometry. Moscow.

[2] Лобачевский Н.И. Полное собрание сочинений. М.; Л.: Гос. изд-во технико-технической литературы, 1951. Т. 3: Сочинения по геометрии. Воображаемая геометрия. Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам. Пангеометрия. 535 с.

[3] Кутузов Б.В. Геометрия Лобачевского и элементы оснований геометрии. М.: Гос. учебно-педагогическое изд-во Министерства просвещения РСФСР, 1950. 129 с.

геометрическое пространство характеризуется только аксиомами, формализующими общие свойства его моделей. Уровни математического абстрагирования характеризуют динамику развития понятия геометрического пространства в содержании ранее выделенных его модельного и абстрактного представлений. Вместе с развитием представлений геометрического пространства изменяются и его объекты, способы установления их свойств.

В методологии пространственно-теоретического подхода понятие геометрического пространства имеет категориальный характер, динамично развивается из своих модельных образов в абстрактную форму представления в единстве с понятием геометрической фигуры, методами представления и исследования свойств геометрических фигур.

В исследованиях Евклида геометрическое пространство – интуитивный образ физического мира, представленный наглядно-образной моделью. Геометрические фигуры наглядно-образной модели задаются своими конструктивными изображениями, их существование и свойства в интуитивном плане отождествляются с наличием, свойствами физических тел в физическом мире:

– геометрические фигуры – это абстрагированные от предметного содержания и подвергшиеся человеческой идеализации объекты человеческого сознания, представленные своими конструктивными образами;

– свойства формы, взаимного расположения тел в физическом мире в деятельности математического отражения преобразуются в пространственные свойства формы, взаимного расположения геометрических фигур;

– обоснованная развитием числовых систем человеческая способность измерять физические тела, их структурные элементы сохраняется в системе «привнесенных в геометрическое пространство» метрических характеристик геометрических фигур (длины, величины угла, площади, объема);

– человеческая способность ориентации в окружающем физическом мире интуитивно сохраняется и в наглядно-образном представлении геометрического пространства – в конструктивной форме изображения пространственных геометрических фигур, в содержании декартовой системы координат.

В «Конических сечениях» Аполлония коническая поверхность, плоскость сечения, конкретное сечение (новый тип геометрических фигур – плоские линии) имеют наглядно-образную форму «геометрического» существования вместе с интуитивным «присутствием» познающего субъекта. Как и у Евклида, исследования Аполлония направлены на анализ формы, пространственных и метрических свойств линий в содержании конструктивной формы аналитико-синтетического метода.

Исследования же Р. Декарта, Л. Эйлера осуществляются в содержании арифметической модели геометрического пространства, как двумерного (Р. Декарт), так и трехмерного (Л. Эйлер). Предметом исследования выступают аналитические модели определенных видов геометрических фигур (линии, поверхности), наряду с аналитико-синтетическим методом (метод сечений) в анализе свойств пространственных образов геометрических фигур ведущую роль играет аналитический метод – исследование уравнений, неравенств, систем с переменными алгебраическими средствами.

В учебной геометрической деятельности сформированные в классических исследованиях модельные представления геометрического пространства имеют фундаментальное значение:

– наглядно-образная, векторная и арифметическая модели геометрического пространства задают различные образные представления геометрического пространства;

– наглядно-образная модель выступает ведущей в модельном представлении геометрического пространства, на ее основе создаются векторная и арифметическая модели;

– в содержании каждой из моделей геометрические фигуры представлены различными образами, исследуются средствами соответствующего модели метода доказательства;

ВЕСТНИК КРАСНОЯРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА им. В.П. АСТАФЬЕВА

– общая система свойств модельных образов базовых геометрических фигур позволяет в процедуре математического обобщения создать конструкцию абстрактного геометрического пространства.

Результаты исследования. Наглядно-образная модель геометрического пространства охватывает все классы геометрических фигур, расположенных на плоскости (плоские) и в пространстве (пространственные, телесные), изучаемых в «Началах» Евклида, в «Геометрии» Р. Декарта, в аналитической геометрии Л. Эйлера – в системе конструктивных, пространственных, метрических свойств.

Характеризующие систему объектов наглядно-образной модели изображения геометрических фигур имеют условный характер (плоские изображения пространственных геометрических фигур), создаются либо определенными конструктивными средствами (линейка и циркуль, циркуль и прямой угол, двусторонняя линейка), либо в содержании современных компьютерных математических сред (Maple, Mathematica, MathCad, Mat Lab), интерактивных геометрических сред («Живая геометрия», GEONExT, Geo Gebra) [Смирнов, Смирнова, 2018; Сарыглар, 2021; Сергеева, Шабанова, Гроздев, 2016; Abebayehu, Hsiu-Ling, 2023; Brown et al., 2022; Zehavit et al., 2022; Uwurukundo et al., 2023].

В процессе конструирования геометрических фигур с опорой на пространственный геометрический образ либо вне его формируются структурирующие пространственное геометрическое мышление субъекта процессы представления и воображения [Якиманская, 1980]. Имеющие общекультурную значимость в жизнедеятельности человека процессы конструирования пространственных геометрических образов (И.Ф. Шарыгин) глубоко разработаны в содержательном и методическом планах (С.Н. Четверухин, П.С. Моденов, А.С. Пархоменко) [Моденов, Пархоменко, 1961].

Исходящая из процедуры конструирования изображения геометрической фигуры как способа обоснования ее существования задача конструирования плоских и пространственных геометрических фигур циркулем и линейкой составляет содержание целостной геометрической деятельности, сочетающей систему аналитических, эвристических действий мысленного плана и процедур геометрического конструирования. Н.Ф. Четверухин, Б.И. Аргунов и М.Б. Балк в качестве закономерности конструктивной деятельности в содержании наглядно-образной модели геометрического пространства отмечают ее проектный характер:

– исходным этапом задачи на построение геометрической фигуры выступает анализ, связывающий данные элементы геометрической фигуры с искомыми для поиска плана ее построения;

– на основе анализа осуществляется построение геометрической фигуры, содержание которой характеризуется синтезом конструктивных действий;

– процесс построения конструктивного образа геометрической фигуры развивается в процедуре доказательства того, что построенная фигура удовлетворяет требованиям задачи;

– заключительным действием построения является исследование вопросов существования решения, наличие разных способов построения[4] [Четверухин, 1952].

Математическая теория геометрических построений, называемая Н.Ф. Четверухиным конструктивной геометрией, определяемая Б.И. Аргуновым и М.Б. Балком в системе абстрактных аксиом, имеет существенное отличие от других форм учебной геометрической деятельности – ее решение всегда является конструктивным. Выступающая составной частью наглядно-образной модели геометрического пространства конструктивная геометрия в содержании метода геометрических мест точек, метода геометрических преобразований, алгебраического метода направлена на формирование пространственного геометрического мышления как в плане деятельности представливания, так и в плане деятельности воображения.

---

[4] Аргунов Б.И., Балк М.Б. Геометрические построения на плоскости. М.: Гос. учебно-педагогическое изд-во Министерства просвещения РСФСР, 1957. 267 с.

Задачи на построение в содержании интерактивных геометрических сред, как отмечают многие геометры, методисты (В.А. Смирнов, И.М. Смирнова, О.Л. Безумова, Р.П. Овчинникова, О.Н. Троицкая) не являются чем-то самостоятельным. Передача функций конструирования, преобразования изображения геометрической фигуры компьютерной среде, обоснованная лишь в условиях наличия у субъекта сформированного навыка ее построения, приводит к статическому, динамическому образам геометрической фигуры, обладающим существенно большими наглядными возможностями [Смирнов, Смирнова, 2018]. При этом если статическое изображение используется «для создания образа типичного представителя множества изучаемых геометрических объектов и получения выводов об их позиционных свойствах», то динамическое изображение отражает как свойство устойчивости пространственных и метрических свойств, так и свойство их изменчивости[5].

В широком содержании учебной геометрической деятельности, связанной с формированием геометрических понятий, решением задач на построение, на доказательство с использованием интерактивных геометрических сред (ИГС) Т.Ф. Сергеева, М.В. Шабанова, С.И. Гроздев выделяют динамическую геометрию – ориентированную на освоение традиционного содержания курса геометрии в сочетании с динамическим моделированием. Система операций ИГС включает инструменты для введения в модель математических объектов и понятий, инструменты для измерения параметров модели, инструменты изучения модели, обеспечивающие возможность разнообразного изображения чертежа, анимации, оставления следа движущимся геометрическим объектом, временного удаления структурных элементов геометрического образа.

Простота и легкость создания моделей геометрических объектов с помощью ИГС, отмечают авторы, дополняются методическими возможностями: обеспечение поэтапного перехода от наглядно-действенного мышления к словесно-логическому; обучение деятельности по математическому моделированию; реализация дифференцированного подхода посредством вариативности содержания обучения и способов его освоения; развитие мотивации и познавательного интереса [Сергеева, Шабанова, Гроздев, 2016, с. 85].

Не утратившая своей значимости конструктивная деятельность создания все более сложных изображений геометрических фигур, востребованных современными техникой и технологиями, приводит к созданию во внутреннем плане субъекта пространственного образа геометрической фигуры:

– отражающего систему визуально наблюдаемых свойств бесконечного класса геометрических фигур;

– представленного понятием геометрической фигуры, характеризуемым объемом – бесконечной совокупностью геометрических фигур;

– обогащенного системой пространственных и метрических свойств понятия геометрической фигуры, устанавливаемых в представленных понятийной формой процедурах геометрического доказательства;

– выступающего знаковым средством создания полной системы свойств понятия класса геометрических фигур в схеме «конструктивное изображение – пространственный образ – понятие»;

– позволяющего осуществлять родовидовую систематизацию геометрических фигур как в схеме обобщенного расширения «квадрат – прямоугольник – четырехугольник – плоский многоугольник», так и в схеме понятийной конкретизации «призма – правильная призма – правильная шестиугольная призма».

В содержании наглядно-образной модели конструктивная деятельность создания пространственных образов геометрических фигур закономерно дополняется родовидовой систематизацией геометрических фигур, имеющей понятийную основу. Понятие геометрической фигуры поглощает ее пространственный образ и характеризуется системой содержательных

[5] Безумова О.Л., Овчинникова Р.П, Троицкая О.Н. и др. Обучение геометрии с помощью возможностей GeoGebra: учеб.-метод. пособие. Архангельск: КИРА, 2011. 140 с.

свойств соответствующего класса геометрических фигур, как существенных, так и свойств-следствий. Систематизация понятий геометрических фигур осуществляется в анализе свойств рода геометрических фигур и его вида: всякое свойство рода является свойством вида, вид геометрических фигур выделяется добавлением нового существенного свойства.

Базовыми пространственными свойствами, формируемыми в содержании наглядно-образной модели геометрического пространства, выступают: свойства отношения принадлежности в совокупностях точек, прямых, плоскостей; свойства отношения порядка в совокупности точек, прямых, линий, поверхностей; свойства взаимного расположения прямых, линий на плоскости; свойства взаимного расположения прямых, линий, плоскостей, поверхностей в пространстве. Фундаментальный характер в наглядно-образном представлении свойств взаимного расположения геометрического пространства имеют свойства параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей, формирующие «каркас субъектных пространственных представлений», создающие пространственные образы и системы свойств понятий многоугольников (плоскость), многогранников (пространство). Помимо конструктивных действий, в исследовании пространственных свойств геометрических фигур широкие возможности предоставляют действия комбинирования, вписывания, описывания геометрических фигур, в содержании которых свойства одной фигуры позволяют устанавливать свойства другой фигуры.

Родовидовая систематизация геометрических фигур, позволяющая в наиболее оптимальной форме выделять и исследовать свойства геометрических фигур, определяет основное содержание наглядно-образного представления геометрического пространства. «Предлагаемая нами геометрия, – подчеркивает И.Ф. Шарыгин, – это в первую очередь геометрия фигуры» [Шарыгин, 2000]. Но как в конструктивной деятельности, так и в деятельности исследования пространственных свойств важную роль играют представленные в наглядно-образной форме отображения, в частности преобразования геометрического пространства: преобразования движения, преобразования подобия, центральное и параллельное проектирование. Выступающие объектом учебной геометрической деятельности преобразования движения, подобия и их конкретные виды в системе их конструктивных и абстрактных свойств приводят к геометрическим понятиям равенства и подобия, выделению метода геометрических преобразований в доказательстве признаков равенства и подобия геометрических фигур.

В математическом отражении деятельности измерения в физическом пространстве геометрическое пространство наделяется метрическими функциями длины, угловой величины, площади и объема, заданными на соответствующих совокупностях геометрических фигур и определяющими включение пространства действительных чисел с фундаментальным методом предельного перехода в представление геометрического пространства [Горбачев, 2016]. Осуществляемая в процедурах выделения, доказательства, приложения теорем деятельность исследования конструктивных, пространственных, метрических свойств в системе их взаимных связей составляет основное содержание учебной геометрической деятельности в представлении наглядно-образной модели геометрического пространства [Горбачев, 2022].

В общеобразовательном курсе математики наглядно-образная модель геометрического пространства выступает единственной из всех моделей математических пространств, в содержании которых в полной мере ставится и успешно решается (А.А. Столяр[6], И. Лакатос[7], [Болтянский, 1973; Далингер, 2006; Игошин, 2009; Слепкань[8]; Фетисов, 1954]) методическая задача формирования деятельности математического

[6] Столяр А.А. Педагогика математики: учеб. пособие для студентов физико-математических ф-тов пед. вузов. Минск: Вышэйшая школа, 1986. 414 с.

[7] Лакатос И. Доказательство и опровержение: как доказываются теоремы / пер. с англ. И.Н. Веселовского. М.: Наука, 1967. 152 с.

[8] Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы обучения математике: метод. пособие. К.: Рад. школа, 1983. 192 с.

доказательства. «Доказательство геометрического предложения, – отмечает А.М. Фетисов, – имеет своей целью установление его достоверности при помощи логического вывода из уже доказанных или известных истин» [Фетисов, 1954, с. 10]. В дискуссиях о содержании деятельности доказательства А.А. Столяр акцентирует внимание не столько на заучивании и воспроизведении готовых доказательств, сколько на мыслительных процессах поиска, открытия, построения доказательства. Констатируя неточное и неясное представление обучающихся «о технике математического рассуждения» В.Г. Болтянский исследует задачи анализа логической структуры теоремы и ее различных форм, содержательной формы логической структуры математического доказательства, представленные как на языке алгебры высказываний, так и на языке алгебры предикатов. В содержании деятельности математического доказательства З.И. Слепкань выделяет ее закономерные этапы: изучение готовых доказательств, их воспроизведение; самостоятельное построение доказательств математических предложений по предложенной схеме; осуществление доказательства предложений конкретным способом, методом; самостоятельный поиск и изложение доказательства конкретных математических предложений.

В анализе доказательства теорем общеобразовательного курса математики В.А. Далингер выделяет содержательный блок знаний и умений – используемых в формулировке математических предложений, в качестве аргументов процедур рассуждений, структурный блок – умений выделения логической структуры математического предложения и его равносильного преобразования, структуры доказательства, определяющей используемый метод; логический блок – умений построения цепочек логических умозаключений, имеющих содержательную форму [Далингер, 2006]. Закономерностью деятельности доказательства в содержании наглядно-образной модели геометрического пространства выступает интеграция конструктивного и аналитико-синтетического методов. «Среди всех методов доказательства теорем в школьном курсе геометрии, – указывает В. А. Далингер, – основную нагрузку несет синтетический метод, ибо он является составной частью доказательства любым другим методом; анализ и синтез практически неотделимы друг от друга и составляют единый аналитико-синтетический метод» [Далингер, 2006, с. 31]. Его конкретные формы отражают способы осуществления процедур анализа и синтеза: синтетический метод (от условия к заключению), аналитический метод (от заключения к условию), метод доказательства от противного, метод перебора, исключения случаев, метод геометрических преобразований.

Общей закономерностью аналитико-синтетического метода доказательства в учебной геометрической деятельности является его формирование как в представлении наглядно-образной модели геометрического пространства, так и в содержании учебной теории абстрактного геометрического пространства. Точнее, аналитико-синтетический метод доказательства свойств образов геометрических фигур формируется в содержании наглядно-образной модели геометрического пространства (абстрагирование от предметных свойств реального мира) и развивается в содержании учебной теории абстрактного геометрического пространства (абстрагирование от модельных образов объектов). Если ведущими средствами доказательства теорем в наглядно-образной модели являются конструктивные изображения геометрических фигур и соответствующие им пространственные образы, то в представлении абстрактного геометрического пространства метод доказательства основан на системе его фундаментальных свойств в форме аксиом учебной теории и системе характеристических свойств определений понятий теории.

Доказательство теорем о свойствах геометрических фигур аналитико-синтетическим методом в содержании наглядно-образной модели и доказательство теорем в содержании абстрактного геометрического пространства существенно отличаются. Доказательство теоремы в содержании наглядно-образной модели опирается на конструктивные, наглядно воспринимаемые свойства геометрических фигур,

ВЕСТНИК КРАСНОЯРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА им. В.П. АСТАФЬЕВА

при этом доказанная теорема справедлива только в данной модели геометрического пространства (доказательство в модели). Доказательство теоремы в содержании учебной теории абстрактного геометрического пространства основывается на более строгих основаниях, осуществляется в системе ссылок на аксиомы абстрактного геометрического пространства, на характеристические свойства определений понятий учебной теории, выстраивается в последовательности умозаключений на базе содержательной формы правил логического вывода (доказательство в теории). Математически строгий уровень доказательства теоремы приводит к ее справедливости в абстрактном геометрическом пространстве, в каждой из его моделей.

Заключение. Формирующееся в учебной геометрической деятельности представление геометрического пространства является одной из фундаментальных математических конструкций субъектного сознания. Наряду с конструкцией геометрического пространства в учебной математической деятельности создаются представления пространства числовых систем, пространства числовых и нечисловых функций, пространства числовых предикатов (уравнений, неравенств, систем с переменными) и т.д.

Каждое из математических пространств формируется в содержании пространственно-теоретического подхода, определенного закономерностями математического абстрагирования: на уровне обыденного сознания выделяются образные представления математического пространства в системе его базовых моделей; на основе модельных представлений математического пространства определяется его абстрактная форма, закономерности которой исследует соответствующая учебная теория.

Геометрическое пространство является одним из базовых математических пространств, его абстрактная форма определяется в системе аксиом.

Согласно закономерностям педагогической психологии, абстрактная форма геометрического пространства может быть сформирована только на основе его модельных представлений.

Создаваемая в системе конструктивных пространственных образов геометрических фигур, преобразований наглядно-образная модель как в историко-геометрическом, так и в содержательно-методическом планах является основной. В теории и методике обучения математике ее зачастую рассматривают не только в качестве единственной модели геометрического пространства, но и совпадающей с представлением абстрактного геометрического пространства.

В классических исследованиях представления геометрического пространства в качестве базовых выделены его наглядно-образная (Евклид), векторная (Г. Вейль), арифметическая (Р. Декарт, Л. Эйлер) модели. В пространственно-теоретическом подходе абстрактная форма геометрического пространства может возникать лишь на основе интеграции его модельных представлений.

Закономерности формирования наглядно-образной модели геометрического пространства задаются вполне определенной последовательностью видов деятельности учения:

– создание пространственных образов геометрических фигур, преобразований на базе их конструктивных изображений определенными средствами, средами;

– родовидовая систематизация геометрических фигур, осуществляемая в понятийной форме;

– доказательство свойств понятий геометрических фигур в конструктивной форме аналитико-синтетического метода;

– исследование пространственных, метрических свойств понятий геометрических фигур, конкретных геометрических фигур в содержании аналитико-синтетического метода;

– формирование векторной, арифметической моделей геометрического пространства с соответствующими (векторным, аналитическим) методами исследования векторных, аналитических моделей геометрических фигур;

– интеграция наглядно-образной, векторной, арифметической моделей геометрического пространства с соответствующими методами математического доказательства.

Библиографический список

1. Аполлоний Пергский. Конические сечения / под общ. ред. А.А. Панферова, С.В. Кирбятьева. М.: Юстицинформ, 2019. 448 с.
2. Болтянский В.Г. Как устроена теорема // Математика в школе. 1973. № 1. С. 41–49.
3. Вейль Г. Пространство, время, материя: лекции по общей теории относительности. Изд. 5-е, перераб. / пер. с нем. В.П. Визгина. М.: Янус, 1996. 480 с.
4. Гильберт Д. Основания геометрии: пер с нем. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 389 с.
5. Горбачев В.И., Пузырева Е.Н. Закономерности формирования абстрактного математического мышления в представлении геометрического пространства // Ученые записки Брянского государственного университета. 2018. № 4. С. 7–14.
6. Горбачев В.И. Модельный подход формирования учебной геометрической деятельности // Фундаментальные проблемы обучения математике, информатике и информатизации образования: сб. тез. докл. междунар. науч. конф. 30 сентября – 2 октября 2022 г. Елец: Елец. гос. ун-т им. И.А. Бунина, 2022. С. 113–118.
7. Горбачев В.И. Теория геометрических фигур геометрического пространства в методологии теоретического типа мышления // Наука и школа. 2016. № 4. С. 132–144.
8. Далингер В.А. Методика обучения учащихся доказательству математических предложений. М.: Просвещение, 2006. 257 с.
9. Декарт Р. Геометрия. М.; Л.: Государственное объединение научно-технического изд-ва, 1938. 296 с.
10. Игошин В.И. Математическая логика как педагогика математики. Саратов: Изд. центр «Наука», 2009. 360 с.
11. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Геометрические преобразования. М.: Изд.-во Моск. ун-та, 1961. 232 с.
12. Начала Евклида / пер. с греч. и коммент. Д. Мордухай-Болтовского. М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1950. Кн. I–VI. 448 с.
13. Начала Евклида / пер. с греч. и коммент. Д. Мордухай-Болтовского. М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1950. Кн. XI–XV. 332 с.
14. Пузырева Е.Н. Представление наглядно-образной модели геометрического пространства в учебной геометрической деятельности // Ученые записки Брянского государственного университета. 2023. № 1. С. 45–72.
15. Сарыглар С.В. Компьютерная анимация на уроках алгебры 7 класса: результаты экспериментальной работы // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева. 2021. № 4 (58). С. 126–131. DOI: https://doi.org/10.25146/1995-0861-2021-58-4-310
16. Сергеева Т.Ф. Шабанова М.В., Гроздев С.И. Основы динамической геометрии: монография. М.: АСОУ, 2016. 152 с.
17. Смирнов В.А., Смирнова И.М. Геометрия с GeoGebra. Стереометрия. М.: Прометей, 2018. 172 с.
18. Фетисов А.М. О доказательстве в геометрии. М.: Гос. изд-во техн.-теоретической литературы, 1954. 60 с.
19. Четверухин Н.Ф. Методы геометрических построений. М.: Учеб.-пед. изд-во Министерства просвещения РСФСР, 1952. 148 с.
20. Шарыгин И.Ф. Нужна ли школе XXI века геометрия? // Математика в школе. 2004. № 4. С. 72–78.
21. Шарыгин И.Ф. Рассуждения о концепции школьной геометрии. М.: Изд-во Московского центра непрерывного математического образования, 2000. 56 с.
22. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. М.: Гос. изд.-во физ.-мат. лит., 1961. Т. II. 391 с.

ВЕСТНИК КРАСНОЯРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА им. В.П. АСТАФЬЕВА

23. Якиманская И.С. Развитие пространственного мышления школьников. М.: Педагогика, 1980. 240 с
24. Abebayehu, Y., & Hsiu-Ling, C. (2023). GeoGebra in mathematics education: a systematic review of journal articles published from 2010 to 2020. *Interactive Learning Environments*, *31* (2), 5682–5697. DOI: https://doi.org/10.1080/10494820.2021.2016861
25. Brown, C.W., Kovács, Z., Recio, T. et al. (2022). Is computer algebra ready for conjecturing and proving geometric inequalities in the classroom? *Math. Comput. Sci.*, *16*, 31. DOI: https://doi.org/10.1007/s11786-022-00532-9
26. Eschenburg, J.H. (2022). *Geometry – Intuition and Concepts*. Springer, Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-38640-5_4 (access date: 03.09.2023).
27. Uwurukundo, M.S., Maniraho, J.F., Tusiime, M. et al. (2023). GeoGebra software in teaching and learning geometry of 3-dimension to improve students' performance and attitude of secondary school teachers and students. *Educ Inf Technol, 29*, 10201–10223. DOI: https://doi.org/10.1007/s10639-023-12200-x
28. Zehavit, K., Meirav, A., Miriam, D., & Tali, M. (2022). Self-efficacy and problem-solving skills in mathematics: the effect of instruction-based dynamic versus static visualization. *Interactive Learning Environments*, *30* (4), 759–778. DOI: 10.1080/10494820.2019.1683588

REPRESENTATION OF GEOMETRIC SPACE AND ITS VISUAL-FIGURATIVE MODEL IN EDUCATIONAL ACTIVITIES

V.I. Gorbachev (Bryansk, Russia)
E.N. Puzyreva (Bryansk, Russia)

Abstract

Statement of the problem. In educational geometric activities, the problem of forming model representations of geometric space revealing the content of its visual-figurative model is investigated.

The purpose of the article is to establish in historical and geometric analysis the content and methodological patterns of the formation of a visual–figurative model of geometric space and its subsequent integration with vector, arithmetic models in the representation of abstract geometric space.

Methodology (materials and methods). The methodology of the research is based on a spatial-theoretical approach implemented at successive levels of mathematical abstraction to form a model representation of geometric space and, based on it, to define an abstract geometric space.

Research results. The subject of research in educational geometric activities is the patterns of formation of model, abstract representations of geometric space. Since the time of Euclid's Elements, the basis of the model representation of geometric space has been its visual-figurative model, characterized by constructive images of geometric shapes, spatial images of their classes.

In addition to creating constructive images of geometric shapes, transformations of motion and similarity, the content of the visual-figurative model consists of a generic systematization of geometric shapes based on the operation of spatial images, the activity of mathematical proof, the study of constructive, spatial, and metric properties of geometric shapes.

Along with constructive images of geometric shapes, their iconic images are also used in educational geometric activities: vector models of geometric shapes, analytical models of geometric shapes. Vector, arithmetic models of geometric space are created in the system of vector, analytical images of geometric shapes in the subject's consciousness. In the integration of visual-figurative, vector and arithmetic models, a visual-figurative level of spatial geometric thinking is formed.

Conclusion. The formation of representations of geometric space in the spectrum of models, followed by abstraction from model images with axiomatization of properties valid in each of the models, eliminates its combined figurative and abstract study implemented in textbooks of geometry of general education.

Keywords: *methodology of formation of educational geometric activity, visual-figurative model of geometric space, model representation of geometric space.*

Gorbachev, Vasiliy I. – PhD (Physics and Mathematics), DSc (Education), Professor, Honored Teacher of the Russian Federation, Director of the Institute of Natural Sciences, Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky Bryansk, Russia); e-mail: enibgu@mail.ru

Puzyreva, Elizaveta N. – Senior Lecturer, Department of Informatics and Applied Mathematics, Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky (Bryansk, Russia); ORCID iD: 0009-0002-4565-190X; e-mail: puzyreva-knysh@yandex.ru

References

1. Apollonius of Perga (2019). *Konicheskie secheniya* [Conical sections]. Edited by A.A. Panferov, S.V. Kirbyatieva. Moscow.
2. Boltyansky, V.G. (1973). How the theorem works. *Matematika v shkole* [Mathematics at School], *1*, 41–49.
3. Weil, G. (1996). *Prostranstvo, vremya, materiya. Lektsii po obshchey teorii otnositelnosti* [Space, time, matter. Lectures on the general theory of relativity]. Moscow.
4. Gilbert, D (1948). *Osnovaniya geometrii* [The foundations of geometry]: translated from German. Moskow; Leningrad.
5. Gorbachev, V.I., & Puzyreva, E.N. (2018). Regularities of formation of abstract mathematical thinking in the representation of geometric space. *Uchenye zapiski Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta* [The Bryansk State University Memoirs]. Bryansk, *4*, 7–14.
6. Gorbachev, V.I. (2022, September 30 – October 2). Model approach to the formation of educational geometric activities. In: Fundamental problems of teaching mathematics, computer science and informatization of education (pp. 113–118). International scientific conference. Yelets.

7. Gorbachev, V.I. (2016). Theory of geometric shapes of geometric space in the methodology of the theoretical type of thinking. *Nauka I shkola* [Science and School], *4*, 132–144.
8. Dalinger, V.A. (2006). *Metodika obucheniya uchashchikhsya dokazatelstvu matematicheskikh predlozheniy* [Methods of teaching students to prove mathematical propositions]. Moscow.
9. Descartes, R. (1938). *Geometriya* [Geometry]. Moskow; Leningrad.
10. Igoshin, V.I. (2009). *Matematicheskaya logika kak pedagogika matematiki* [Mathematical logic as the pedagogy of mathematics]. Saratov.
11. Modenov, P.S., & Parkhomenko, A.S. (1961). *Geometricheskie preobrazovaniya* [Geometric transformations]. Moscow.
12. *Nachala Evklida* [The Elements of Euclid]. Books I–VI (1950). Translated from Greek and commented by D. Mordukhai-Boltovsky. Moskow; Leningrad.
13. *Nachala Evklida* [The Elements of Euclid]. Books XI–XV (1950). Translated from Greek and commented by D. Mordukhai-Boltovsky. Moskow-Leningrad.
14. Puzyreva, E.N. (2023). Presentation of a visual-figurative model of geometric space in educational geometric activities. *Uchenye zapiski Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta* [The Bryansk State University Memoirs]. Bryansk, *1*, 45–72.
15. Saryglar, S.V. (2021). Computer animation in the 7th grade algebra lessons: results of experimental work. *Vestnik KGPU im. V.P. Astafyeva* [Bulletin of the KSPU named after V.P. Astafyev], *4* (58), 126–131. DOI: https://doi.org/10.25146/1995-0861-2021-58-4-310
16. Sergeeva, T.F., Shabanova, M.V., & Grozdev, S.I. (2016). *Osnovy dinamicheskyj geometrii* [Fundamentals of dynamic geometry]. Moscow.
17. Smirnov, V.A., & Smirnova, I.M. (2018) *Geometriya s GeoGebra. Stereometriya* [Geometry with GeoGebra. Stereometry]. Moscow.
18. Fetisov, A.M. (1954). *O dokazatelstve v geometrii* [On proof in geometry]. Moscow.
19. Chetverukhin, N.F. (1952). *Metody geometricheskikh postroeniy* [Methods of geometric constructions]. Moscow.
20. Sharygin, I.F. (2004). Does the school of the 21st century need geometry? *Matematika v shkole* [Mathematics at School], *4*, 72–78.
21. Sharygin, I.F. (2000). *Rassuzhdeniya o kontseptsii shkolnoy geometrii* [Reasoning about the concept of school geometry]. Moscow.
22. Euler, L. (1961). *Vvedenie v analiz beskonechnykh [*Introduction to the analysis of the infinite]. Vol. II. Moscow.
23. Yakimanskaya, I.S. (1980). *Razvitie prostranstvennogo myshleniya shkolnikov* [The development of spatial thinking of schoolchildren]. Moscow.
24. Abebayehu, Y., & Hsiu-Ling, C. (2023). GeoGebra in mathematics education: a systematic review of journal articles published from 2010 to 2020. *Interactive Learning Environments*, *31* (2), 5682–5697. DOI: https://doi.org/10.1080/10494820.2021.2016861
24. Brown, C.W., Kovács, Z., Recio, T. et al. (2022). Is computer algebra ready for conjecturing and proving geometric inequalities in the classroom? *Math. Comput. Sci.*, *16*, 31. DOI: https://doi.org/10.1007/s11786-022-00532-9
26. Eschenburg, J.H. (2022). *Geometry – Intuition and Concepts*. Springer, Wiesbaden. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-658-38640-5_4
27. Uwurukundo, M.S., Maniraho, J.F., Tusiime, M. et al. (2023). GeoGebra software in teaching and learning geometry of 3-dimension to improve students' performance and attitude of secondary school teachers and students. *Educ Inf Technol, 29*, 10201–10223. DOI: https://doi.org/10.1007/s10639-023-12200-x
28. Zehavit, K., Meirav, A., Miriam, D., & Tali, M. (2022). Self-efficacy and problem-solving skills in mathematics: the effect of instruction-based dynamic versus static visualization. *Interactive Learning Environments*, *30* (4), 759–778. DOI: 10.1080/10494820.2019.1683588